

ВЕСЦІ НАЦЫЯНАЛЬНАЙ АКАДЭМІІ НАВУК БЕЛАРУСІ № 3 2015
СЕРЫЯ ФІЗІКА-МАТЭМАТЫЧНЫХ НАВУК

УДК 519.21+519.6

А. Д. ЕГОРОВ

**О ПОРЯДКЕ СХОДИМОСТИ АППРОКСИМАЦИЙ ОДНОГО КЛАССА
ФУНКЦИОНАЛОВ ОТ ВИНЕРОВСКОГО ПРОЦЕССА**

*Институт математики Национальной академии наук Беларуси, Минск, Беларусь,
e-mail: egorov@im.bas-net.by*

Получена теорема о порядке сходимости приближенной формулы для вычисления математического ожидания одного класса функционалов специального вида от винеровского процесса. Формула основана на использовании дискретизации временного интервала и квадратурных формул, точных для функциональных многочленов третьей степени.

Ключевые слова: винеровский процесс, функционал от винеровского процесса, математическое ожидание, приближенное вычисление, порядок сходимости.

A. D. EGOROV

**ORDER OF CONVERGENCE OF APPROXIMATIONS FOR ONE CLASS
OF FUNCTIONALS OF THE WIENER PROCESS**

*Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Belarus, Minsk, Belarus,
e-mail: egorov@im.bas-net.by*

The result on the order of convergence of the approximate formula is obtained for evaluation of the mathematical expectation of one class of special-type functionals of the Wiener process. The formula is based on the use of sampling the time interval and the quadrature formulas exact for third-degree functional polynomials.

Keywords: Wiener process, functional of the Wiener process, mathematical expectation, approximate evaluation, order of convergence.

В данной работе рассматривается задача приближенного вычисления математического ожидания

$$I \equiv E \left[\int_0^t G(X_s) ds \right], \quad t \in [0, T], \quad (1)$$

где $G(u)$, $u \in R$, – заданная функция, имеющая ограниченные производные до шестого порядка включительно, X_t – случайный процесс, заданный равенством

$$X_t = x + \int_0^t p(s) dW_s, \quad t \in [0, T],$$

где $x \in R$, $p(t)$ – детерминированная кусочно-непрерывная функция, удовлетворяющая условию $\sup_{[0, T]} |p(t)| \leq p = \text{const}$, $W = \{W_t, t \in [0, T]\}$ – винеровский процесс. Далее будет использоваться представление

$$X_t = X_{t_k} + \int_{t_k}^t p(s) dW_s, \quad t \in [t_k, t_{k+1}], \quad (2)$$

где $t_k = k\Delta$, $\Delta = \frac{t}{n}$, $k = 0, 1, 2, \dots, n$, – фиксированное разбиение отрезка $[0, t]$.

© Егоров А. Д., 2015

Наряду с соотношением (2) рассматривается равенство

$$\hat{X}_t = x_k + \int_{t_k}^t p(s) dW_s, \quad t \in [t_k, t_{k+1}], \quad (3)$$

где вещественные числа x_k , $k = 0, 1, 2, \dots, N$, $x_0 = x$, будут выбираться в соответствии с рассматриваемым ниже алгоритмом, предложенным в работе [1] для вычисления ожиданий функционалов от решений стохастических дифференциальных уравнений. Заметим, что из принятых ограничений вытекает возможность перестановки знаков математического ожидания и интеграла в (1) и применения квадратурной формулы трапеций

$$\int_0^t E[G(X_s)] ds \approx \frac{t}{2n} \sum_{k=0}^{n-1} (E[G(X_{t_k})] + E[G(X_{t_{k+1}})]) \equiv I_n, \quad (4)$$

где

$$|I - I_n| \leq \frac{t}{12} \left(\frac{t}{n} \right)^2 \left| \frac{d^2}{ds^2} (E[G(X_s)]) \right|_{s=t^*}, \quad t^* \in [0, t]. \quad (5)$$

Так как точные значения ожиданий в правой части равенства (4) не известны, мы должны заменить их приближенными значениями и получить оценку погрешности формулы (4) после этой замены. В данной работе приближенные значения получаются в соответствии с упомянутым выше алгоритмом последовательно, используя функциональные квадратурные формулы для вычисления математических ожиданий, точные для многочленов третьей степени [2, 3]. Алгоритм предполагает также замену в правой части (4) X_{s_k} на \hat{X}_{s_k} из формулы (3), т. е. использование вместо (4) приближенной формулы

$$\int_0^t E[G(X_s)] ds \approx \frac{t}{2n} \sum_{k=0}^{n-1} (E[G(\hat{X}_{t_k})] + E[G(\hat{X}_{t_{k+1}})]) \equiv \hat{I}_n. \quad (6)$$

Оценим погрешность аппроксимации после такой замены:

$$\hat{R}_n \equiv I - \hat{I}_n = (I - I_n) + (I_n - \hat{I}_n), \quad (7)$$

где первая разность в правой части (7) оценивается по формуле (5), а для второй разности имеем

$$(I_n - \hat{I}_n) = \frac{t}{2n} \sum_{k=0}^{n-1} \left((E[G(X_{t_k})] - E[G(\hat{X}_{t_k})]) + (E[G(X_{t_{k+1}})] - E[G(\hat{X}_{t_{k+1}})]) \right). \quad (8)$$

Поэтому получение оценки предлагаемого алгоритма связано с оценкой разностей

$$r_{k+1} \equiv E[G(X_{t_{k+1}})] - E[G(\hat{X}_{t_{k+1}})], \quad k = 0, 1, 2, \dots. \quad (9)$$

Используя разложение Тейлора

$$\begin{aligned} G(X_{t_{k+1}}) &= G\left(X_{t_k} + \int_{t_k}^{t_{k+1}} p(s) dW_s\right) = G(X_{t_k}) + G'(X_{t_k}) \int_{t_k}^{t_{k+1}} p(s) dW_s + \\ &+ \frac{1}{2} G''(X_{t_k}) \left(\int_{t_k}^{t_{k+1}} p(s) dW_s \right)^2 + \frac{1}{6} G^{(3)}(X_{t_k}) \left(\int_{t_k}^{t_{k+1}} p(s) dW_s \right)^3 + \\ &+ \frac{1}{24} G^{(4)}\left(X_{t_k} + \theta \int_{t_k}^{t_{k+1}} p(s) dW_s\right) \left(\int_{t_k}^{t_{k+1}} p(s) dW_s \right)^4, \quad \theta \in [t_k, t_{k+1}], \end{aligned}$$

и аналогичное разложение $G(\hat{X}_{t_{k+1}}) = G\left(x_k + \int_{t_k}^{t_{k+1}} p(s) dW_s\right)$, получим

$$\begin{aligned}
r_{k+1} = & \left(E[G(X_{t_k})] - G(x_k) \right) + \\
& + E\left[G'(X_{t_k}) \int_{t_k}^{t_{k+1}} p(s) dW_s - G'(x_k) \int_{t_k}^{t_{k+1}} p(s) dW_s \right] + \\
& + \frac{1}{2} E\left[G''(X_{t_k}) \left(\int_{t_k}^{t_{k+1}} p(s) dW_s \right)^2 - G''(x_k) \left(\int_{t_k}^{t_{k+1}} p(s) dW_s \right)^2 \right] + \\
& + \frac{1}{6} E\left[G^{(3)}(X_{t_k}) \left(\int_{t_k}^{t_{k+1}} p(s) dW_s \right)^3 - G^{(3)}(x_k) \left(\int_{t_k}^{t_{k+1}} p(s) dW_s \right)^3 \right] + \\
& + \frac{1}{24} E\left[G^{(4)}\left(X_{t_k} + \theta \int_{t_k}^{t_{k+1}} p(s) dW_s \right) \left(\int_{t_k}^{t_{k+1}} p(s) dW_s \right)^4 - \right. \\
& \left. - G^{(4)}\left(x_k + \tilde{\theta} \int_{t_k}^{t_{k+1}} p(s) dW_s \right) \left(\int_{t_k}^{t_{k+1}} p(s) dW_s \right)^4 \right] \equiv p_k + \sum_{m=1}^4 p_k^{(m)}, \quad \theta, \tilde{\theta} \in [t_k, t_{k+1}].
\end{aligned}$$

Оценим величины $p_k^{(m)}$, $m=1,2,3,4$:

$$\begin{aligned}
p_k^{(1)} &= E[G'(X_{t_k})] E\left[\int_{t_k}^{t_{k+1}} p(s) dW_s \right] - G'(x_k) E\left[\int_{t_k}^{t_{k+1}} p(s) dW_s \right] = 0; \\
|p_k^{(2)}| &= \frac{1}{2} \left| E[G''(X_{t_k})] E\left[\left(\int_{t_k}^{t_{k+1}} p(s) dW_s \right)^2 \right] - G''(x_k) E\left[\left(\int_{t_k}^{t_{k+1}} p(s) dW_s \right)^2 \right] \right| = \\
&= \frac{1}{2} \int_{t_k}^{t_{k+1}} p^2(s) ds |E[G''(X_{t_k})] - G''(x_k)| \leq \frac{1}{2} p^2 \Delta |E[G''(X_{t_k})] - G''(x_k)|; \\
p_k^{(3)} &= \frac{1}{6} \left| E[G^{(3)}(X_{t_k})] E\left[\left(\int_{t_k}^{t_{k+1}} p(s) dW_s \right)^3 \right] - G^{(3)}(x_k) E\left[\left(\int_{t_k}^{t_{k+1}} p(s) dW_s \right)^3 \right] \right| = 0; \\
|p_k^{(4)}| &\leq \frac{1}{12} c^{(4)} E\left[\left(\int_{t_k}^{t_{k+1}} p(s) dW_s \right)^4 \right] \leq \frac{1}{12} c^{(4)} p^4 \Delta^2,
\end{aligned}$$

где $c^{(4)} = \sup_{y \in R} |G^{(4)}(y)|$. Из полученных оценок следует, что

$$|r_{k+1}| \leq |E[G(X_{t_k}) - G(x_k)]| + \frac{1}{2} p^2 \Delta |E[G''(X_{t_k})] - G''(x_k)| + \frac{1}{12} c^{(4)} p^4 \Delta^2. \quad (10)$$

Для оценки $|E[G(X_{t_k}) - G(x_k)]|$ воспользуемся очевидным неравенством

$$\begin{aligned}
|E[G(X_{t_k})] - G(x_k)| &\leq |E[G(X_{t_k})] - E[G(\hat{X}_{t_k})]| + \\
&+ |E[G(\hat{X}_{t_k})] - J(G(\hat{X}_{t_k}))| + |J(G(\hat{X}_{t_k})) - G(x_k)| \equiv |r_k| + q_k + \Delta^2,
\end{aligned} \quad (11)$$

где в соответствии с рассматриваемым здесь алгоритмом мы полагаем, что x_k может быть найдено с точностью, не ниже, чем Δ^2 , из равенства

$$J\left(G\left(\hat{X}_{t_k}\right)\right)-G\left(x_k\right)=0, \quad (12)$$

и используем следующую приближенную формулу для вычисления $E\left[G\left(\hat{X}_{(\cdot)}\right)\right]$, точную для многочленов третьей степени (см. [2]):

$$E\left[G\left(\hat{X}_t\right)\right] \approx J\left(G\left(\hat{X}_{(\cdot)}\right)\right) \equiv \frac{1}{2\Delta} \int_{U_k} G\left(x_k+p(|u|) \rho_{t,k}(u)\right) du, \quad (13)$$

где $\rho_{t,k}(u)=\sqrt{\Delta} 1_{[t_k, t]}(|u|) \operatorname{sign}(u)$, $U_k=\left[-t_k,-t_{k-1}\right] \cup\left[t_{k-1}, t_k\right]$.

Таким образом, предлагаемая алгоритмом из [1] приближенная формула может быть записана в виде

$$E\left[\int_0^t G\left(X_s\right) d s\right] \approx \frac{t}{2 n} \sum_{k=0}^{n-1}\left(J\left(G\left(\hat{X}_{t_k}\right)\right)+J\left(G\left(\hat{X}_{t_{k+1}}\right)\right)\right). \quad (14)$$

Из (10)–(11) вытекает рекуррентное соотношение, которое может быть использовано для оценивания r_k :

$$\left|r_{k+1}\right| \leq\left|r_k\right|+q_k+\frac{1}{2} p^2 \Delta\left|E\left[G^{\prime \prime}\left(X_{t_k}\right)\right]-G^{\prime \prime}\left(x_k\right)\right|+O\left(\Delta^2\right). \quad (15)$$

Оценим далее q_k при условии (12) и с учетом того, что приближенная формула точна для функциональных многочленов третьей степени от \hat{X}_s , $s \in\left[t_k, t\right]$:

$$\begin{aligned} \left|q_k\right| &= \frac{1}{24}\left|E\left[G^{(4)}\left(x_{k-1}+\theta \int_{t_{k-1}}^{t_k} b(s) d W_s\right)\left(\int_{t_{k-1}}^{t_k} b(s) d W_s\right)^4\right]-\right. \\ &\quad \left.-J\left[\left[G^{(4)}\left(x_{k-1}+\theta \int_{t_{k-1}}^{t_k} p(s) d W_s\right)\left(\int_{t_{k-1}}^{t_k} p(s) d W_s\right)^4\right]\right]\right| \leq \\ &\leq \frac{1}{24} c^{(4)}\left|E\left[\left(\int_{t_{k-1}}^{t_k} p(s) d W_s\right)^4\right]+J\left[\left(\int_{t_{k-1}}^{t_k} p(s) d W_s\right)^4\right]\right| \leq \\ &\leq \frac{1}{24} c^{(4)} p^4 \Delta^2+\frac{1}{24} c^{(4)} \frac{1}{\Delta} \int_{t_{k-1}}^{t_k}(\sqrt{\Delta})^4 p^4(u) d u \leq \frac{1}{12} c^{(4)} p^4 \Delta^2. \end{aligned} \quad (16)$$

Оценим теперь множитель $\left|E\left[G^{\prime \prime}\left(X_{t_k}\right)\right]-G^{\prime \prime}\left(x_k\right)\right|$ из (15). Для этого сначала вычислим

$$\begin{aligned} J\left(G\left(\hat{X}_{t_k}\right)\right) &= J\left[G\left(x_k+\int_{t_{k-1}}^{t_k} p(s) d W_s\right)\right]=G\left(x_{k-1}\right)+G^{\prime}\left(x_{k-1}\right) \int_{t_{k-1}}^{t_k} p(s) d W_s+ \\ &\quad +\frac{1}{2} G^{\prime \prime}\left(x_{k-1}\right)\left(\int_{t_{k-1}}^{t_k} p(s) d W_s\right)^2+\frac{1}{6} G^{(3)}\left(x_{k-1}\right)\left(\int_{t_{k-1}}^{t_k} p(s) d W_s\right)^3+ \\ &\quad +\frac{1}{24} G^{(4)}\left(x_{k-1}+\theta \int_{t_{k-1}}^{t_k} p(s) d W_s\right)\left(\int_{t_{k-1}}^{t_k} p(s) d W_s\right)^4= \\ &= G\left(x_{k-1}\right)+\frac{1}{2} G^{\prime \prime}\left(x_{k-1}\right) \int_{t_{k-1}}^{t_k} p^2(s) d s+\frac{1}{24} c^{(4)} J\left[\left(\int_{t_{k-1}}^{t_k} p(s) d W_s\right)^4\right] \leq \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq G(x_{k-1}) + \frac{1}{2} G''(x_{k-1}) \int_{t_{k-1}}^{t_k} p^2(s) ds + \frac{1}{24} c^{(4)} \frac{1}{\Delta} \int_{t_{k-1}}^{t_k} p^4(u) du \Delta^2 \leq \\
&\leq G(x_{k-1}) + \frac{1}{2} c^{(2)} p^2 \Delta + \frac{1}{24} c^{(4)} p^4 \Delta^2 = \\
&= G(x_{k-1}) + O(\Delta), (\theta \in [t_k, t_{k+1}]).
\end{aligned} \tag{17}$$

В силу (12) из (17) следует, что

$$G(x_k) = G(x_{k-1}) + O(\Delta). \tag{18}$$

Далее, аналогичным способом вычисляя $J(G''(\hat{X}_{t_k}))$, получаем

$$J(G''(\hat{X}_{t_k})) = G''(x_{k-1}) + O(\Delta). \tag{19}$$

(Единственным отличием от вышеприведенных оценок $J(G''(\hat{X}_{t_k}))$ является использование констант $c^{(m+2)}$ при оценке производных $G^{(m+2)}$.)

Из (16) следует, что

$$\begin{aligned}
x_k &= G^{-1}(G(x_{k-1}) + O(\Delta)) = x_{k-1} + (G^{-1})'(G(x_{k-1})) O(\Delta) + O(\Delta^2) = \\
&= x_{k-1} + (G^{-1})'(G(x_{k-1})) O(\Delta) = \\
&= x_{k-1} + \frac{1}{G'(x_{k-1})} O(\Delta) = x_{k-1} + O(\Delta), (G^{-1} - \text{обратная функция})
\end{aligned}$$

с учетом условия $G'(x_{k-1}) \neq 0$. Отсюда получим

$$\begin{aligned}
G''(x_k) &= G''(x_{k-1} + O(\Delta)) = G''(x_{k-1}) + G^{(3)}(x_{k-1}) O(\Delta) + O(\Delta^2) = \\
&= G''(x_{k-1}) + O(\Delta).
\end{aligned} \tag{20}$$

Из (19) и (20) получаем

$$J(G''(\hat{X}_{t_k})) = G''(x_k) + O(\Delta). \tag{21}$$

Далее,

$$\begin{aligned}
&\left| E[G''(\hat{X}_{t_k})] - G''(x_k) \right| \leq \left| E[G''(\hat{X}_{t_k})] - J(G''(\hat{X}_{t_k})) \right| + \\
&+ \left| J(G''(\hat{X}_{t_k})) - G''(x_k) \right| = O(\Delta^2) + O(\Delta) = O(\Delta),
\end{aligned} \tag{22}$$

где использована оценка, аналогичная (16) для случая G'' , и оценка (21). Отсюда получаем, что

$$\begin{aligned}
&\left| E[G''(X_{t_k})] - G''(x_k) \right| \leq \left| E[G''(X_{t_k})] - E[G''(\hat{X}_{t_k})] \right| + \\
&+ \left| E[G''(\hat{X}_{t_k})] - G''(x_k) \right| \equiv |r_k''| + O(\Delta),
\end{aligned} \tag{23}$$

где $r_k'' = E[G''(X_{t_k})] - E[G''(\hat{X}_{t_k})]$ можно найти из рекуррентного соотношения, которое получается подобно тому, как это было сделано для r_k в (9)–(11):

$$\begin{aligned}
&|r_k''| \leq \left| E[G''(X_{t_{k-1}})] - G''(x_{k-1}) \right| + \\
&+ \frac{1}{2} p^2 \Delta \left| E[G^{(4)}(X_{t_{k-1}})] - G^{(4)}(x_{k-1}) \right| + O(\Delta^2) \leq
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\leq \left| E \left[G''(X_{t_{k-1}}) \right] - G''(x_{k-1}) \right| + c^{(4)} p^2 \Delta + O(\Delta^2) \leq \\ &\leq \left| E \left[G''(X_{t_{k-1}}) \right] - G''(x_{k-1}) \right| + O(\Delta) = \end{aligned}$$

(используются (15) и (22))

$$\begin{aligned} &= \left| E \left[G''(X_{t_{k-1}}) \right] - E \left[G''(\hat{X}_{t_{k-1}}) \right] \right| + \left| E \left[G''(\hat{X}_{t_{k-1}}) \right] - J(G''(\hat{X}_{t_{k-1}})) \right| + \\ &\quad + \left| J(G''(\hat{X}_{t_{k-1}})) - G''(x_{k-1}) \right| + O(\Delta) = \\ &= \left| r_{k-1}'' \right| + \frac{1}{12} c^{(6)} p^4 \Delta^2 + O(\Delta) = \left| r_{k-1}'' \right| + O(\Delta), \end{aligned}$$

т. е.

$$\left| r_k'' \right| = \left| r_{k-1}'' \right| + O(\Delta). \quad (24)$$

Таким образом, получаем из (15), (23):

$$\begin{aligned} \left| r_{k+1} \right| &= \left| r_k \right| + q_k + O(\Delta^2) + p^2 \Delta \left(\left| r_k'' \right| + O(\Delta) \right) + O(\Delta^2) = \\ &= \left| r_k \right| + p^2 \left| r_k'' \right| \Delta + O(\Delta^2) = \left| r_k \right| + \left| r_k'' \right| O(\Delta) + O(\Delta^2), \end{aligned} \quad (25)$$

и далее, с учетом (24),

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n r_k &= r_1 + \left(r_1 + O(\Delta^2) \right) + \left(r_1 + 2O(\Delta^2) \right) + \dots + \left(r_1 + nO(\Delta^2) \right) = \\ &= nr_1 + O(\Delta^2) \sum_{k=1}^n k = \frac{1}{2} n(n-1) O(\Delta^2) = O(1), \end{aligned}$$

где мы воспользовались тем, что $r_1 \equiv E[G(X_{t_1})] - E[G(\hat{X}_{t_1})] = 0$. Из приведенных оценок вытекает справедливость следующей теоремы.

Т е о р е м а. *Имеет место следующая асимптотическая оценка порядка погрешности приближенной формулы (14):*

$$\left| \int_0^t E[G(X_s)] ds - \frac{t}{2n} \sum_{k=0}^{n-1} \left(J(G(\hat{X}_{t_k})) + J(G(\hat{X}_{t_{k+1}})) \right) \right| = O(n^{-1}),$$

где $\hat{X}_{t_{k+1}} = x_k + \int_{t_k}^{t_{k+1}} p(s) dW_s$, x_k находится из равенства (12), $J(G(\hat{X}_{t_k}))$ определяется формулой (13).

Рассмотрим пример, иллюстрирующий применение предложенного алгоритма.

Положим в (1): $G(u) = 1 + \cos(1 + 0,5u) \sin(0,5u)$, $p(s) = 1$. Точное значение ожидания (1) в этом случае равно $I = \frac{\sqrt{2}}{2} (\cos 1 + \sin 1) \left(1 - e^{-\frac{t}{2}} \right) + (1 - 0,5 \sin 1)t$. Результаты вычислений по приближенной формуле (14) для $x = \frac{\pi}{4}$ приведены в таблице.

t	Точное значение	$n = 50$	$n = 100$	$n = 500$
0,2	0,208833	0,208646	0,208739	0,208814
0,6	0,600795	0,599224	0,600004	0,600636
1,0	0,963708	0,95963	0,961654	0,963295
1,4	1,30284	1,29537	1,29907	1,30208
1,8	1,62249	1,61094	1,61666	1,62132

Примечание. Приведенные численные результаты согласуются с указанным в теореме порядком сходимости.

Список использованной литературы

1. *Zherelo, A. V.* On convergence of the method based on approximately exact formulas for functional polynomials for calculations of expectation of the functionals to solution of stochastic differential equations / A. V. Zherelo // Monte Carlo Methods and Applications. – 2013. – Vol. 19 (4). – P. 183–200.
2. *Egorov, A. D.* Functional integrals: Approximate evaluations and applications / A. D. Egorov, P. I. Sobolevsky, L. A. Yanovich. – [S. l.]: Kluwer Academic Publishers, 1993.
3. *Егоров, А. Д.* Введение в теорию и приложения функционального интегрирования / А. Д. Егоров, Е. П. Жидков, Ю. Ю. Лобанов. – М.: Физматлит, 2006.
4. *Egorov, A. D.* Approximate formulas for expectations of functionals of solutions to stochastic differential equations / A. D. Egorov, K. K. Sabelfeld // Monte Carlo Methods and Applications. – 2010. – Vol. 16, N 2. – P. 95–127.

Поступила в редакцию 13.05.2015